# پایداری دینامیکی حلقه‌های اخترفیزیکی*

محمد هادی خشن(۱) محمود روشن(۲)

**چکیده** *هدف از این مقاله بررسی سیستم‌های حلقه‌ای در چارچوب یک نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ گرانشی می‌باشد. درحقیقت پایداری گرانشی سیستمی حلقه‌ای متشکل از N ذره با جرم‌های برابر m درحال گردش حول یک جسم مرکزی سنگین مطالعه می‌شود. برای این کار ابتدا دینامیک سیستم در حالت پایه توصیف و معادلات حرکت به‌دست می‌آید. سپس بااستفاده از آنالیز اختلالی، معادلات حرکت خطی‌شده به‌دست می‌آید. نهایتاً بااستفاده از آنالیز فوریه و معادلات خطی‌شده، معادلهٔ پاشندگی سیستم محاسبه می‌شود. بااستفاده از مقادیر تجربی پارامترهای آزاد نظریهٔ فوق‌الذکر، معادلهٔ پاشندگی را برای حالت‌های مختلف بررسی و شرایط پایداری سیستم نسبت به اختلالات کوچک پیدا می‌شود، سپس نتایج به‌دست‌آمده را با سیستم متناظر در گرانش نیوتونی مقایسه می‌شود.*

**واژه‌های کلیدی** ناپایداری گرانشی، نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ گرانشی.

## On the Dynamical Stability of Astrophysical Rings

M.H. Khashen M. Roshan

**Abstract** *The purpose of this paper is to consider the ring systems in the context of a modified gravity theory. In fact, the gravitational stability of a ring system consisted of N particle with the same mass m rotating around a massive object at the center is studied. After finding the equation of motion and considering the dynamics of the system in the equilibrium state, perturbative analysis is used in order to find the linearized version of the equations of motion. Finally using the Fourier analysis, the dispersion relation of the system is derived. At the end, using the observational values of the free parameters of the above mentioned theory and also the dispersion equation the stability criterion of the system for several cases is derived. Finally, the results have been compared with the corresponding results in Newtonian gravity.*

**Key Words** Gravitational instability, Modified gravity.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۱۱/۱۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۶/۲/۲۳ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i2.62423

(۱) کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه فردوسی، مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول: استادیار، دانشکدهٔ علوم دانشگاه فردوسی، مشهد. mroshan@um.ac.ir

## مقدمه

حلقه‌ها و قرص‌ها از اجزای اصلی برخی سیستم‌های اخترفیزیکی هستند، بنابراین پایداری و تحولات آنها در اخترفیزیک از اهمیت بالایی برخوردار است. گرانش می‌تواند در تعیین پایداری و تحول این سیستم‌ها نقشی کلیدی بازی کند. برای مثال ثابت شده است که در حلقه‌های زحل و اورانوس خودگرانش، نسبت به عوامل مؤثر دیگر قوی‌تر است [1]؛ به‌گونه‌ای که منجر به ناپایداری‌های نامتقارن می‌شود و شرایط انتقال اندازهٔ حرکت و جرم در حلقه‌ها را فراهم می‌کند. حضور چنین ناپایداری‌های دینامیکی یک عامل مهم در تعیین ساختار حلقه است [2, 3]. به‌عنوان مثال نگاهی بر تاریخچهٔ حلقه‌های سیارهٔ زحل می‌تواند اهمیت ناپایداری‌های دینامیکی را نشان دهد. ده‌ها سال پس از این‌که حلقه‌های زحل به‌وسیلهٔ گالیله رصد شد، ماهیت حلقه‌ها یکی از موضوعات مورد بحث در محافل نجومی بود. برخی اظهار می‌کردند که آنها صفحاتی جامد از مواد هستند، درحالی‌که دیگران گمان می‌بردند حلقه‌ها متشکل از میلیون‌ها ذرهٔ کوچک هستند که هر یک شبیه به قمری فرضی اطراف زحل درحال حرکتند. رقبای نظریهٔ صفحات جامد چنین استدلال می‌کردند که فعالیت نیروهای کشندی برروی یک حلقهٔ جامد بسیار قوی است و می‌تواند طی مدتی کوتاه حلقه را از هم جدا کند، مگر این‌که به احتمال بعید حلقه از مقداری مواد بسیار چسبنده که در زمین ناشناخته هستند، تشکیل شده باشد. طرفداران نظریهٔ حلقهٔ جامد پیشنهاد کردند که درواقع حلقه از نوارهای بسیار باریک ساخته شده است، دراین‌صورت نیروهای کشندی فشار کافی برای جداسازی حلقه را نخواهند داشت. در سال ۱٦۷۵ رصدها، خطی بسیار نازک و تاریک را در میان حلقه‌ها آشکار کردند، که حلقه‌ها را به دو بخش حلقهٔ بیرونی به نام A و حلقهٔ درونی به نام B، تقسیم می‌کرد. در اواسط سال ۱۸۵۰ اخترشناسان حلقه‌ای کوچک و جدید را در میان حلقهٔ B آشکار کردند، که به‌نام حلقهٔ C شناخته می‌شود. این واقعیت به‌طور جدی نشان می‌داد که حلقه‌ها جامد نیستند [4].

ماهیت حلقه‌های زحل نهایتاً در سال ۱۸۵۷ آشکار شد. فیزیکدان اسکاتلندی جیمز کلارک ماکسول که بعدها نظریهٔ الکترومغناطیس را ارائه کرد، بااستفاده از فیزیک نیوتونی نشان داد که حلقه‌های جامد هرگز نمی‌توانند پایدار باقی بمانند؛ و بنابراین باید متشکل از ذرات ریز باشند [5]. درحقیقت وی از ساختار و ترکیب حلقه‌های زحل چیزی نمی‌دانست، اما فرض کرد که ممکن است حلقه‌ها از مایع، جامد و حتی هزاران قطعه‌سنگ تشکیل شده باشند. او بااستفاده از آنالیز پایداری دینامیکی در مکانیک نیوتنی نشان داد که حلقه‌ها با توزیع نسبتاً یکنواخت نمی‌توانند مایع یا جامد باشند؛ بنابراین، به‌دنبال سومین فرض خود برای حلقه‌های زحل رفت و با فرض این‌که جرم تمام قطعه‌سنگ‌ها یکسان است و به‌طور یکنواخت در مدارهای دایره‌ای در حال چرخش به‌دور زحل می‌باشند، نتیجه گرفت که اگر جرم قطعه‌سنگ‌ها در رابطهٔ زیر صدق کند، حلقه‌ها پایدارند [5]:

$$\mathrm{m} \leq \frac{2.298\mathrm{M}}{\mathrm{n}^2} \qquad (۱)$$

که در آن m جرم قطعه‌سنگ‌ها یا ذرات حلقه است و $M$ جرم زحل یا جسم مرکزی است و $n$ تعداد ذرات تشکیل‌دهندهٔ سیستم است.

بعد از ماکسول پژوهش‌های متنوع دیگری نتایج او را تأیید کردند، برای نمونه چند مورد درادامه آمده است. در سال ۱۸۸۹ تیسراند فرض کرد که حلقه‌ها هیچ تأثیری روی زحل ندارند. او بااستفاده از این فرض، همان شرط ماکسول را به‌طور تحلیلی به‌دست آورد. در سال ۱۹۳۵ پندس [6] پایداری حلقه‌ها را دوباره بررسی کرد. او ثابت کرد که برای $n$ های کوچک‌تر از ٦ (و بزرگ‌تر از ۲) حلقه‌ها حتماً ناپایدارند. در سال ۱۹۸٦ ویلردینگ [7] از نظریهٔ امواج

چگالی استفاده کرد و نشان داد که نتیجه‌ای که ماکسول به‌دست آورده است در $n$های بزرگ صحیح است. در سال ۱۹۸۸ سالو و یودر [8] فرض کردند که اجسام به‌طور یکنواخت حول جسم مرکزی توزیع نشده‌اند. آنها نشان دادند که برخی ساختارهای نامتقارن پایدار نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در سال ۱۹۹۱ وین و چیرس [9] تحلیل پندس را تعمیم دادند، و نشان دادند که وقتی $n$ کوچک است نیز آستانهٔ پایداری تابعی از $n$ است. در سال ۱۹۹٤ مووکل [10] پایداری خطی سیستم $n$ جسمی را وقتی به‌طور یکنواخت حول جسم مرکزی می‌چرخند بررسی کرد. او نشان داد که وقتی تعداد ذرات بزرگ‌تر از ۷ باشد حلقه‌های متقارن پایدار هستند. در سال ۲۰۰۰ رابرت [11] کار مووکل را تعمیم داد و معیاری برای پایداری حلقه‌ها تعیین کرد که با معیار وین و چیرس [9] مطابقت داشت.

هدف این مقاله بررسی پایداری حلقه‌های مشابه در نظریهٔ تعمیم‌یافته MOG است که از مجموعه‌ای از ذرات تشکیل شده‌اند. این نظریه برای حل معمای مادهٔ تاریک ارائه شده است [12]. این مشکل یکی از اساسی‌ترین چالش‌های فیزیک نظری است. به بیان دقیق‌تر رصدهای اخترفیزیکی نشان می‌دهند که شواهد مستقیمی برای اختلاف بین گرانش نیوتونی و مشاهدات وجود دارد؛ به‌عنوان مثال منحنی چرخش کهکشان‌های مارپیچی در فاصله‌های دور نسبت به مرکز کهکشان تخت هستند. درحالی‌که طبق گرانش نیوتنی، این منحنی‌ها به‌جای این‌که توابع تخت باشند، کاهشی هستند.

علاوه‌بر این یک مشکل جدی در جرم خوشه‌های کروی کهکشانی نیز وجود دارد. درحقیقت این خوشه‌ها تقریباً شش مرتبه پرجرم‌تر از آنچه هستند که با تلسکوپ به‌صورت مرئی رصد می‌شوند. درنتیجه فیزیک‌دانان معتقدند مادهٔ تاریک و گمشده‌ای در دنیا وجود دارد که تاکنون آشکارسازی نشده است. با این وجود، اگرچه بسیاری با روش‌های مختلف در آزمایشگاه‌های مدرن به‌دنبال این ذرات می‌گردند، اما هنوز نشانی از آنها رصد نشده است.

یک رهیافت دیگر برای حل این معما، تعمیم‌دادن نظریهٔ گرانش استاندارد است. به بیان دیگر شاید قانون گرانش استاندارد بایستی اصلاح شود و درحقیقت هیچ مادهٔ تاریکی در دنیا وجود ندارد. نظریهٔ MOG این رهیافت را دنبال می‌کند. به‌لحاظ ریاضی این نظریه به‌مراتب پیچیده‌تر از نظریهٔ نسبیت عام انیشتین است. درحقیقت MOG میدان‌های کلاسیک دیگری نیز دارد که درجات آزادی نظریه را افزایش می‌دهند. به بیان دقیق‌تر MOG یک نظریهٔ تانسور- اسکالر- برداری است و دارای دو میدان اسکالر و یک میدان برداری پروکا است. این میدان‌ها از MOG یک نظریهٔ مؤثر برای حل مشکل مادهٔ تاریک ساخته‌اند.

## سیستم حلقه‌ای ذره‌ای در نظریهٔ MOG

ابتدا لازم است تا حالت زمینه یعنی سیستم بدون اختلال پیدا شود. برای این کار لازم است تا پتانسیل گرانشی تعمیم‌یافته در نظریهٔ MOG معرفی شود. می‌توان نشان داد که پتانسیل گرانشی ناشی از جرم نقطه‌ای M در این مدل عبارت است از:

$$\phi_{eff} = -\frac{GM}{r}(1+\alpha-\alpha e^{-\mu_0 r}) \qquad (۲)$$

که در آن $G$ ثابت جهانی گرانش نیوتن است. از طرف دیگر $\alpha$ و $\mu_0$ پارامترهای آزاد نظریه هستند که توسط رصدهای مربوط به منحنی چرخش کهکشان‌های مارپیچی مقدار آنها به‌دست آمده است. این مقادیر به‌ترتیب عبارتند از [13]:

$$\alpha = 8.89 \pm 0.34$$
$$\mu = 0.042 \pm 0.004\ kpc^{-1}$$

با داشتن این پتانسیل، فرض می‌کنیم $n$ ذره با جرم‌های برابر $m$ حول جسم مرکزی سنگین با جرم M در حال چرخش هستند و حلقه‌ای به‌شعاع $r$ تشکیل می‌دهند. مکان هر ذره در مختصات مختلط را

به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$x_j = re^{i(\omega t+\frac{2j\pi}{n})} \quad (۳)$$

دراین‌صورت می‌توان نشان داد که سرعت زاویه‌ای ذرات با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} + \frac{Gm}{r^3} I_n + \frac{GM}{r^3}\alpha\left[1-(1+\mu_0 r)e^{-\mu_0 r} + \frac{\mu}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-e^{-2r\sin\frac{k\pi}{n}}-2\mu_0 r e^{-2r\sin\frac{k\pi}{n}}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\right] \quad (٤)$$

که در آن،

$$I_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4\sin(k\pi/n)} \quad (٥)$$

می‌توان به‌راحتی نشان داد که‌این سرعت از سرعت متناظر در مکانیک نیوتونی اندکی بیشتر است. به‌عبارت دیگر سرعت چرخش ذره‌ای با جرم m حول جسم مرکزی با جرم M روی دایره‌ای به‌شعاع $r$، به نظریهٔ گرانشی وابسته است. در نظریه‌های گرانشی که برای حل معمای مادهٔ تاریک ساخته شده‌اند، گرانش نسبت به گرانش نیوتونی قوی‌تر است. بنابراین سرعت چرخش ذرات بزرگ‌تر از مکانیک نیوتونی است. لازم‌به ذکر است که قوی‌تر بودن نیروی گرانشی نسبت‌به مکانیک نیوتونی، برای توجیه منحنی چرخش تخت کهکشان‌های مارپیچی لازم است؛ حتی برای توصیف سرعت‌های تصادفی بزرگ کهکشان‌ها در خوشه‌های کهکشانی نیز امری مهم است. درحقیقت امروزه می‌دانیم که در چارچوب مکانیک نیوتونی، سرعت بزرگ کهکشان‌ها در خوشه‌های کهکشانی قابل توجیه نیست. این همان مشکل حل‌نشدهٔ مادهٔ تاریک در اخترفیزیک است.

از طرف دیگر معادلات حرکت در دستگاه استوانه‌ای $(r,\varphi,Z)$ عبارتند از:

$$\begin{cases} \ddot{r}_j - r_j(\dot{\varphi}_j+\omega)^۲ = \frac{\partial U_j}{\partial r_j} \\ r_j\ddot{\varphi}_j + ۲\dot{r}_j(\dot{\varphi}_j+\omega) = \frac{۱}{r_j}\frac{\partial U_j}{\partial \varphi_j} \quad j=1,2,\dots,n \\ \ddot{Z}_j = \frac{\partial U_j}{\partial Z_j} \end{cases} \quad (٦)$$

درحقیقت $U_j$ به‌گونه‌ای تعریف شده است که گرادیان آن نیروی وارد بر ذرهٔ jام را به‌دست می‌دهد. ازآنجایی‌که پایداری سیستم مطالعه می‌شود، اختلالاتی به‌شکل زیر را به مختصات ذرات اعمال می‌شود:

$$r_j = 1 + \rho_j \quad (۷)$$

$$\varphi_j = 2\theta_j + \sigma_j \quad (۸)$$

$$z_j = 0 + zz_j \quad (۹)$$

در راوابط بالا $\rho_j$ اختلال در شعاع ذرات، $\sigma_j$ اختلال در زاویهٔ ذرات و $zz_j$ اختلال در ارتفاع ذرات می‌باشد و ازآنجاکه اختلالات بسیار کوچک هستند در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} \frac{\rho_j}{r_j} \ll 1 \\ \frac{\sigma_j}{\varphi_j} \ll 1 \\ \frac{zz_j}{z_j} \ll 1 \end{cases} \quad (۱۰)$$

با جای‌گذاری اختلالات در معادلات حرکت (٦) و نگه‌داشتن ضرایب تا مرتبهٔ اول اختلال، به معادلات مختل‌شدهٔ خطی زیر می‌رسیم:

$$\ddot{\rho} - 2\omega\dot{\sigma} = \omega^2\rho + A\rho + B\sigma \quad (۱۱)$$

$$\ddot{\sigma} + 2\omega\dot{\rho} = C\rho + D\sigma \quad (۱۲)$$

$$\ddot{z}z = Ezz \quad (۱۳)$$

که در آنها $A,B,C,D$ و $E$ ماتریس‌های ضرایب هستند. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره کردیم، پارامتر $\mu_0$ بسیار کوچک است، بنابراین درادامه فرض می‌کنیم که $\mu_0 r \ll 1$ (r شعاع حلقه است). دراین‌صورت جملات

شامل $\mu_0 r$ را فقط تا مرتبهٔ دوم $\mu_0 r$ نگه می‌داریم؛ بنابراین داریم:

$$A_{jj}=2+2\mu-\frac{\mu}{8}\sum_{k\neq j}^{n-1}csc^3(\theta k-\theta j)-3\csc(\theta k-\theta j)-\alpha\mu_0^2\csc(\theta k-\theta j)\left[1+\cos\left(2(\theta k-\theta j)\right)\right]$$

$$A_{jk}=\frac{\mu}{8}\left[csc^3(\theta k-\theta j)+\csc(\theta k-\theta j)+\alpha\mu_0^2\csc(\theta k-\theta j)\left[1+\cos\left(2(\theta k-\theta j)\right)\right]\right]+2\mu\cos(2(\theta k-\theta j))$$

$$B_{jj}=-\mu\sum_{k\neq j}^{n-1}sin\left(2(\theta k-\theta j)\right)[1+\frac{\alpha\mu_0^2}{2}-\frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k-\theta j)}+\frac{1}{16}csc^3(\theta k-\theta j)]$$

$$B_{jk}=\mu\, sin\left(2(\theta k-\theta j)\right)[1+\frac{\alpha\mu_0^2}{2}-\frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k-\theta j)}+\frac{1}{16}csc^3(\theta k-\theta j)]$$

$$C_{jj}=B_{jj}$$

$$C_{jk}=-\mu\, sin\left(2(\theta k-\theta j)\right)[\frac{1}{16}csc^3(\theta k-\theta j)-\frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k-\theta j)}-2]$$

$$D_{jj}=\mu\sum_{k\neq j}^{n-1}cos\left(2(\theta k-\theta j)\right)\left[1+\frac{\alpha\mu_0^2}{2}+\frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k-\theta j)}+\frac{1}{16}csc^3(\theta k-\theta j)\right]+\frac{3}{16}csc^3(\theta k-\theta j)+\frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k-\theta j)}$$

$$D_{jk}=-\mu cos\left(2(\theta k-\theta j)\right)\left[1+\frac{\alpha\mu_0^2}{2}+\frac{\alpha\mu_0^2}{8sin(\theta k-\theta j)}+\frac{1}{16}csc^3(\theta k-\theta j)\right]+\frac{3\mu}{16}csc^3(\theta k-\theta j)+\frac{\alpha\mu_0^2\mu}{8sin(\theta k-\theta j)}$$

$$E_{jj}=-(1+\mu)\left(1-\frac{\alpha\mu_0^2}{2}\right)-\frac{\mu}{8}\sum_{k\neq j}^{n-1}csc^3(\theta k-\theta j)+2\frac{\alpha\mu_0^2}{sin(\theta k-\theta j)}$$

$$E_{jk}=-\mu\left(1+\frac{\alpha\mu_0^2}{2}\right)+\frac{\mu}{8}[csc^3(\theta k-\theta j)+2\frac{\alpha\mu_0^2}{sin(\theta k-\theta j)}] \qquad (۱۴)$$

لازم به ذکر است که فرض کرده‌ایم GM=1 و $\mu=m/M$. برای ساده‌کردن شکل ضرایب از تغییر متغییرهای دیگری به‌شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\rho=\mathcal{F}\xi$$

$$\sigma=\mathcal{F}\eta \qquad (۱۵)$$

$$zz=\mathcal{F}\zeta$$

که در آن $\mathcal{F}$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}_{lk}=e^{2i\theta lk} \qquad (۱۶)$$

دراین‌صورت روابط (۱۳-۱۱) را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\ddot{\xi}-2\omega\dot{\eta}=\omega^2\xi+\Lambda^A\xi+\Lambda^B\eta \qquad (۱۷)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = \Lambda^C\xi + \Lambda^D\eta \qquad (۱۸)$$

$$\ddot{\zeta} = \Lambda^E\zeta \qquad (۱۹)$$

که در آن $\Lambda^x$ ماتریسی قطری از ویژه مقادیر مـاتریس $x$ است. این ماتریس‌ها در زیر آمده‌اند:

$$\Lambda^A{}_j = 2 + \frac{\mu}{2}(c_j + d_j) + \mu\left(2J_j - \frac{1}{4}L_j\right) + \frac{\alpha\mu{\mu_0}^2}{2}a_j$$

$$\Lambda^B{}_j = \sqrt{-1}\mu(J_j + \frac{1}{8}M_j + \frac{\alpha{\mu_0}^2}{2}s_j - \frac{\alpha{\mu_0}^2}{4}b_j)$$

$$\Lambda^C{}_j = \sqrt{-1}\mu(2J_j - \tfrac{1}{8}M_j + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{4}b_j)$$

$$\Lambda^D{}_j = \mu(-J_j(1 + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2}) + \tfrac{1}{4}N_j + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2}a_j)$$

$$\Lambda^E{}_j = -(1+\mu)\left(1 + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2}\right) - \tfrac{\mu}{12}\left(L_j + N_j\right) - \tfrac{\alpha\mu{\mu_0}^2}{2}d_j - \tfrac{\mu}{2}(1 + \tfrac{\alpha{\mu_0}^2}{2})S_j^E \qquad (۲۰)$$

همچنین لازم به ذکر است که:

$$a_j = \sum_{k=1}\frac{cos^2(k\theta)}{\sin(k\theta)}sin^2(k\theta j)$$

$$b_j = \sum_{k=1}\cos(k\theta)sin(2k\theta j)$$

$$c_j = \sum_{k=1}\frac{cos^2(k\theta j)}{\sin(k\theta)}$$

$$d_j = \sum_{k=1}\frac{sin^2(k\theta j)}{\sin(k\theta)}$$

$$L_j = \sum_k\frac{1 + sink\theta^2}{sink\theta^3}\sin^2 kj\theta$$

$$N_j = \sum_k\frac{1 + cosk\theta^2}{sink\theta^3}\sin^2 kj\theta$$

$$M_j = \sum_k\frac{cosk\theta}{sin^2k\theta}sin2kj\theta$$

$$J_j = \begin{cases} 0 & j \neq 1 \\ n/2 & j = 1 \end{cases}$$

$$S_j = \begin{cases} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ n & j = 1, n-1 \end{cases}$$

$$S_j^E = \begin{cases} 2n-2 & j = n \\ -2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۲۱)$$

## پایداری خطی خارج از صفحه

حال که معادلات مرتبه اول اختلال را در دست داریـم، مـی‌تـوانیم تحـول ناپایـداری‌هـا را بررسـی کنـیم. در ساده‌ترین حالت، اختلالات فقط درراسـتای عمـود بـر قرص هستند؛ لذا برای پیدا کردن شرط پایداری خـارج از صفحه، فقط اختلال درراستای عمـود بـر صـفحه را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت تنهـا معادلـهٔ لازم بـرای بررسی پایداری رابطهٔ (۱۹) می‌باشد:

$$\ddot{\zeta} = \Lambda^E\zeta \qquad (۲۲)$$

باتوجه به معادله واضح اسـت کـه بـرای پایـداری لازم است $\Lambda^E$ منفی باشد. اجازه دهید ابتدا فرض کنـیم $j$ مخالف $n$ باشد، دراین‌صورت شرط پایداری عبـارت است از:

$$1 + \frac{\alpha{\mu_0}^2}{2} + \frac{\mu}{12}\left(L_j + N_j\right) + \frac{\alpha\mu{\mu_0}^2}{2}d_j > 0 \qquad (۲۳)$$

از طرف دیگر برای $j = n$ شرط پایداری به‌شکل زیر است:

$$(1 + (2+n)\,\mu)(\,1 + \frac{\alpha{\mu_0}^2}{2}) > 0 \qquad (۲٤)$$

با ساده‌سازی رابطهٔ (۲٤) داریم:

$$\alpha{\mu_0}^2 > -2 \qquad (۲۵)$$

به‌راحتی می‌تـوان نشـان داد کـه اگـر شـرط (۲۵) برقرار باشد، آن‌گـاه (۲۳) نیـز برقـرار اسـت. ازطرفـی باتوجه به این‌که مقادیر $\mu_0$ و $\alpha$ مثبت هستند؛ می‌تـوان

نتیجه گرفت که همانند مکانیک نیوتونی، سیستم حلقه‌ای متشکل از ذرات، نسبت به اختلالات خارج از صفحهٔ حلقه پایدار است. این حقیقت با ماهیت جاذبهٔ نیروی گرانش کاملاً سازگار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت تفاوت مهمی بین MOG و گرانش نیوتونی در اختلالات خارج از صفحه وجود ندارد. البته می‌توان فرکانس نوسانات پایدار را محاسبه کرد. به‌نظر می‌رسد این فرکانس در دو نظریهٔ فوق متفاوت باشد. به بیان دقیق‌تر انتظار می‌رود نوسانات پایدار در راستای z در نظریهٔ MOG بزرگ‌تر از مکانیک نیوتونی باشد. این انتظار صرفاً به‌خاطر قوی بودن نیروی گرانشی در این نظریه است.

## پایداری در صفحه

برای پیداکردن شرایط پایداری در صفحه باید دو معادلهٔ (۱۷ و ۱۸) را نیز درنظر بگیریم. برای این‌کار فرض می‌کنیم تحول زمانی اختلالات به‌شکل زیر باشد:

$$\xi, \eta, \zeta \sim e^{i\lambda t} \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری (۲۶) در روابط (۱۷ و ۱۸) و ترکیب دو معادله به رابطهٔ زیر می‌رسیم :

$$x^4 - qx^2 + rx + s = 0 \qquad (۲۷)$$

که در آن $q, r, s$ توابعی از $\mu$، $j$،$\mu_0$ و $\alpha$ به‌صورت زیر هستند:

$$q = 3 - \frac{\Lambda^A + \Lambda^D}{\omega^2} \qquad (۲۸)$$

$$r = \frac{2(\Lambda^C - \Lambda^B)}{\omega^2} \qquad (۲۹)$$

$$s = \frac{\Lambda^A\Lambda^D + \omega^2\Lambda^D + \Lambda^B\Lambda^C}{\omega^4} \qquad (۳۰)$$

و $x$ تابعی از $\lambda$ است:

$$x = \frac{\lambda}{\omega}/ \qquad (۳۱)$$

برای پایداری باید شرایطی را بررسی کنیم که $\lambda$ یا$x$ حقیقی باشند، دراین‌صورت می‌توان نشان داد که سه شرط زیر می‌بایستی هم‌زمان برقرار باشند:

$$q > 0 \qquad (۳۲)$$

$$\Delta > 0 \qquad (۳۳)$$

$$\Gamma > 0 \qquad (۳٤)$$

که در آنها:

$$\Delta = 4q^3r^2 - 27r^4 + 16q^4s - 144qr^2s - 128q^2s^2 + 256s^3 \qquad (۳۵)$$

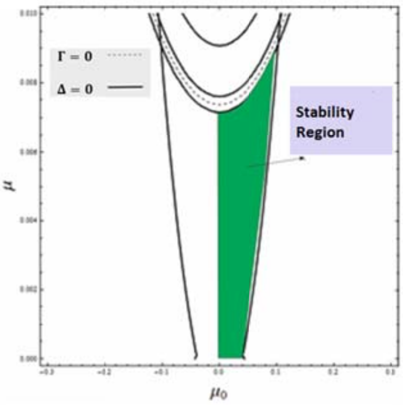
$$\Gamma = 2q(q^2 - 4s) - 9r^2 \qquad (۳٦)$$

اما چون این شرایط به‌روش تحلیلی قابل بررسی نیستند، نمودار آنها را به‌صورت عددی رسم می‌کنیم و شرایط پایداری را بررسی می‌کنیم. اجازه دهید با $n$=7 که مرز پایداری در مکانیک نیوتنی است، شروع کنیم. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره کردیم، میانگین α به‌طور تجربی ۸/۸۹ است. با قرار دادن این عدد نمودار موردنظر را رسم می‌کنیم.

در شکل (۱) که برای $n$=7 رسم شده است، ناحیه‌ای که سیستم نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی می‌ماند مشخص شده است. اگر $\mu_0$ صفر باشد، شرط پایداری به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

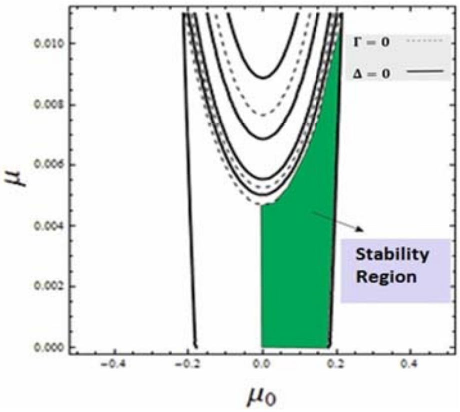
$$\mu \leq 0.00715 \qquad (۳۷)$$

که همان شرطی است که در مکانیک نیوتونی به‌دست آوردیم. بار دیگر تأکید می‌کنیم که $\mu$ نسبت جرم یک ذره در حلقه به جرم مرکزی است. جالب است که این پارامتر به‌تنهایی می‌تواند شرط پایداری مسئله را به‌دست دهد.




شکل ۱ ناحیهٔ پایداری سیستم ۷ذره‌ای

ازآنجاکه اگر $\mu_0 = 0$ باشد، پتانسیل به پتانسیل نیوتونی تبدیل می‌شود، انتظار چنین شرطی را داشتیم؛ اما با زیاد شدن $\mu_0$ این شرط تغییر می‌کند. باتوجه به این‌که با زیادشدن $\mu_0$ نیروی جاذبهٔ بین ذرات بیشتر می‌شود، ذرات با جرم‌های بیشتر می‌توانند نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی بمانند. وجود $\mu_0$ در پتانسیل جاذبهٔ بین ذرات را بیشتر می‌کند، به‌همین‌دلیل با افزایش آن ناحیهٔ پایداری بزرگ‌تر می‌شود، اما اگر از مقدار خاصی بزرگ‌تر باشد نیروی جاذبهٔ بین ذرات بسیار زیاد می‌شود و درصورت وجود اختلال سیستم از هم می‌پاشد؛ اما ازآنجاکه ما شعاع را یک فرض کرده‌ایم تعیین این معیار کار راحتی نیست. باتوجه به رابطهٔ (۲) اگر $\mu_0$ منفی باشد نیرو در فواصل دور بی‌نهایت می‌شود. به‌عبارت دیگر در جواب‌های فیزیکی $\mu_0$ نمی‌تواند منفی باشد، ازاین‌رو قسمت‌های منفی را از مناطق پایداری حذف کردیم. لازم است خاطرنشان کنیم که $\mu_0$ نقش جرم میدان برداری موجود در نظریهٔ MOG را بازی می‌کند و انتظار داریم که جرم وابسته به میدان‌ها مثبت باشد. باتوجه به رفتار کیهان‌شناختی این مدل می‌دانیم که درواقع این کمیت می‌تواند با زمان تغییر کند و لزوماً ثابت نیست.




شکل ۲ ناحیهٔ پایدار سیستم هشت ذره‌ای

در شکل (۲) سیستم هشت ذره‌ای را بررسی کرده‌ایم. در این شکل منطقه‌ای که در آن سیستم می‌تواند نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی بماند مشخص شده است. ازآنجایی‌که $\mu_0$ نمی‌تواند منفی باشد؛ قسمت‌هایی را که دارای $\mu_0$ منفی است از جواب حذف کرده‌ایم. همان‌طور که انتظار داریم در $\mu_0 = 0$ به همان جوابی می‌رسیم که در سیستم نیوتونی رسیدیم.

لازم به یادآوری است که سیستم با گرانش تعمیم‌یافته در حد $\mu_0 = 0$ به سیستمی با پتانسیل گرانشی نیوتونی تبدیل خواهد شد. همان‌طور که در شکل مشخص است با افزایش $\mu_0$ ذراتی که می‌توانند نسبت به اختلالات کوچک پایدار باقی بمانند، جرم بیشتری خواهند داشت؛ اما جرم ذراتی که در سیستم هشت‌ذره‌ای پایدار باقی می‌مانند از جرم ذرات متناظر در سیستم هفت‌ذره‌ای کوچک‌تر است.

## نتایج و پیشنهادات

ازآنجاکه مهم‌ترین نتایج به‌دست‌آمده در بخش قبل نمودارهای انتهای بخش است، با تحلیل نمودارها شروع می‌کنیم. برای رسم نمودارها ابتدا فرض کرده‌ایم که α ثابت باشد. همان‌طور که از قبل انتظار داشتیم در حد $\mu_0 = 0$ همان نتایجی به‌دست آمد که در گرانش

نیوتونی به‌دست آمده است. می‌دانیم که $\mu_0$ نمی‌تواند منفی باشد؛ اما با زیاد شدن $\mu_0$ شرایط تغییر می‌کند و سیستم حلقه‌ای می‌تواند با جرم‌های بزرگ‌تر نسبت به اختلالات کوچک پایدار بماند. ازآنجاکه نیروی گرانشی در نظریهٔ MOG مقداری بزرگ‌تر از نیروی گرانشی نیوتونی است این نتیجه دور از انتظار نبود. اما این روند تا $\mu_0$ خاصی ادامه می‌یابد و پس از آن سیستم حلقه‌ای در هر صورتی ناپایدار می‌شود.

در ابتدا فرض کردیم که شعاع سیستم حلقه‌ای یک باشد، ازآنجاکه متغیر اصلی در معادلات حرکت $\mu_0 r$ بود می‌توان نتیجه گرفت که سیستم‌های با شعاع بزرگ‌تر نسبت به سیستم‌های با شعاع کوچک‌تر ناپایدارترند. در گرانش نیوتونی سیستم حلقه‌ای با ذرات کوچک‌تر از ۷ در هر صورتی ناپایدارند. این اتفاق در نظریهٔ MOG نیز می‌افتد. اگر تعداد ذرات بیشتر شود سیستم با ذرات کم‌جرم‌تر می‌تواند پایدار بماند، البته درصورتی‌که $\mu_0$ در دو سیستم برابر باشد.

درپایان خاطرنشان می‌کنیم که بررسی پایداری موضعی یک حلقهٔ سیالی نیز درادامهٔ این پژوهش قابل انجام است و برای توصیف ستاره‌زایی در حلقه‌های کهکشانی می‌تواند کمک کند.

## تقدیر و تشکر

این پژوهش با حمایت دانشگاه فردوسی با شماره اعتبار 32039(19/09/1393) انجام شده است.

## مراجع

1. Goldreich, P. and Tremaine, S., "The dynamics of planetary rings", *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 20, pp. 249-283, (1982).
2. Christodoulou, D.M. and Narayan, R., "The stability of accretion tori. IV-Fission and fragmentation of slender, self-gravitating annuli", *The Astrophysical Journal*, Vol. 388, pp. 451-466, (1992).
3. Shu, F. , "Waves in planetary rings", in IAU Colloq. 75, Planetary Rings, (1984).
4. Bond, G., "Discovery of inner dark ring of Saturn", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 11, pp. 20, (1850).
5. Maxwell, J.C., "*On the stability of the motion of Saturn's rings*", Cambridge, (1859).
6. Pendse, C., "The theory of Saturn's rings", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 234(735), pp. 145-176, (1935).
7. Willerding, E., "Theory of density waves in narrow planetary rings", *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 161, pp. 403-407, (1986).
8. Salo, H. and Yoder, C., "*Dynamics of coorbital satellite rings, in The Few Body Problem*", Springer, pp. 179-184, (1988).
9. Scheeres, D. and Vinh, N., "Linear stability of a self-gravitating ring", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 51(1), pp. 83-103, (1991).
10. Moeckel, R., "Linear stability of relative equilibria with a dominant mass", *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol. 6(1), pp. 37-51, (1994).
11. Roberts, G.E., "Linear stability in the 1+ n-gon relative equilibrium", *in Proceedings of the III International Symposium "Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics", eds. J. Delgado, E. Lacomba, & E. Pérez-Chavela (World Scientific, Singapore)*, (2000).
12. Vanderbei, R.J. and Kolemen, E., "Linear stability of ring systems", *The astronomical Journal*, Vol. 133(2), pp. 656, (2007).

13. Moffat, J. and Rahvar, S., "The MOG weak field approximation and observational test of galaxy rotation curves", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 436(2), pp. 1439-1451, (2013).